19 - نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1+3+5+ \dots +(2n-1)$

1) احسب S_1 , S_2 , S_3 , S_4

2) خمن عبارة S_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين .

20 - x عدد حقيقي كيفي

1) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n يكون

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1\right) = (x-1)\sum_{r=0}^{r=n-1} x^r$$

2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة .

21 - (U_n) متتالية معرفة على $I\!N$ بـ $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

1) احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، U_4

2) خمن عبارة U_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

الدرس 2

النِهَايَاتُ وَ الاسْتِمْرَارُ

1 - النهايات في اللانهاية و المستقيمات المقاربة

1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ و المستقيم المقارب الأفقي

القول ان الدالة f لها نهاية حقيقية ℓ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح مركزه ℓ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من اجل كل قيم x الكبيرة (اي من اجل كل قيم x من المجال $]A, +\infty[$)

و تكتب $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

ℓ $f(x)$ A x

إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ فان المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

y $y = \ell$ ℓ O

ملاحظة

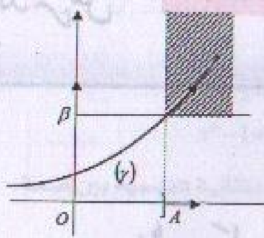
نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

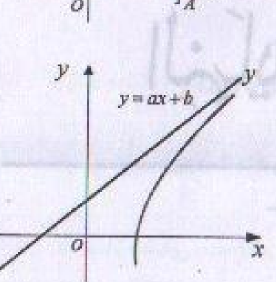
مثال -

الدوال $x\mapsto \frac{1}{x}$ ، $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ ، $x\mapsto \frac{1}{x^n}\,(n\in\mathbb{N}^*)$ ، $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$ لها النهاية صفر عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$

1 - 2 النهاية الغير المنتهية عند $(+\infty)$

نقول ان الدالة f لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح من الشكل $]\beta,+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من اجل كل قيم x الكبيرة
(أي من اجل كل قيم x من المجال $]A,+\infty[$)
و تكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.





إذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل
$f(x)=a\,x+b+h(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$
فإن المستقيم ذا المعادلة $y=a\,x+b$
مقارب مائل للمنحني الدالة f بجوار $(+\infty)$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $(-\infty)$

مثال -

. الدوال $x\mapsto x$ ، $x\mapsto x^2$ ، $x\mapsto x^n$ مع $(n\in\mathbb{N}^*)$ ، $x\mapsto\sqrt{x}$ لها النهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$

. إذا كان n زوجي فإن $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$

. إذا كان n فردي فإن $\lim_{n\to-\infty} x^n=-\infty$

. الدالتان $x\mapsto \sin x$ و $x\mapsto \cos x$ ليست لهما نهاية عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$

تمرين تدريبي . 1

لتكن f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أوجد العدد الحقيقي A بحيث إذا كان $x > A$ فإن $3,1 > f(x) > 2,9$

✓ الحل

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

2) نقول ان $3,1 > f(x) > 2,9$ يعني بذلك $3,001 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$

وبما اننا نهتم بالقيم الكبرى لـ x فإن $x-1>0$.

بضرب حدود المتباينة $3,1 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$ بالعدد $(x-1)$ نجد :

$3,001(x-1) > 3x-2 > 2,999(x-1)$

أي $0,001x-3,001 > -2 > -0,001x-2,999$

حل المتراجحة $0,001x-3,001 > -2 > -0,001x-2,999$ يكافئ حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} -2 > -0,001x-2,999 \;\;......\; (1)\\ 0,001x-3,001 > -2 \;\;......\; (2)\end{cases}\quad ......\text{❶}$$

بعد حل المتراجحة (1) نجد $x > -999$

بعد حل المتراجحة (2) نجد $x > 1001$

إذن مجموعة حلول الجملة ❶ هي $]1001,+\infty[$

و بالتالي يمكن اخذ $A=1001$

. أي كلما اخذ x قيما اكبر من A فإن قيم $f(x)$ تتراكم حول القيمة 3 .

تمرين تدريبي . 2

من اجل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ نعلم ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)=0$ و نعلم ايضا لما $x>5$ فإن $f(x)>4$
و لما $x<-8$ فإن $f(x)-x+1<0$ ماذا نستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f ؟

✓ الحل

. المعلومة « $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$ » تبين لنا أن المستقيم ذا المعادلة $y=4$ مقارب افقي للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$

. المعلومتان « $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x+1)=0$ » تبينان أن المستقيم ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $(-\infty)$.

. المعلومة « إذا كانت $x>5$ فإن $f(x)>4$ » تبين لنا ايضا أن المنحنى الممثل للدالة f يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y=4$ على المجال $]5,+\infty[$

- المعلومة « إذا كانت $x<-8$ فإن $f(x)-x+1<0$ » تبين لنا ان المنحنى يقع تحت المستقيم المقارب المائل ذي المعادلة $y=x-1$ على $]-\infty,-8[$

تمرين تدريبي . 3

لتكن f دالة معرفة كما يلي $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$ مع $x\neq 0$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) ماذا تستنتج من حساب النهايتين السابقتين بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

✓ الحل

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

2) نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+2+\frac{1}{x}$

- بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن المستقيم ذا المعادلة $y=x+2$ مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- بما أن $f(x)-(x+2)=\frac{1}{x}$ فإنه إذا كان $x>0$ فإن المنحنى يقع فوق المستقيم (d)

و إذا كان $x<0$ فإن المنحنى يقع تحت (d) حيث $(d): y=x+2$

2 - نهاية دالة عند عدد حقيقي a

نرمز ب D_f إلى مجموعة تعريف الدالة f

و a عدد حقيقي ينتمي إلى D_f

أو a لا ينتمي إلى D_f (a حاد لـ D_f)

2 - 1 النهاية المنتهية عند a . المستقيم المقارب العمودي

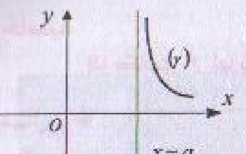
نقول أن الدالة f لها النهاية $(+\infty)$ عند a

يعني أن كل مجال من الشكل $]\beta,+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a

(أي من أجل كل x من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من D_f)

و نكتب $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$

. إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ فإن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة f



ملاحظة

1) نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

2) نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $(-\infty)$ لما x يؤول إلى a

يعني أن $-f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لما x يؤول إلى a

مثال -

لتكن f و g دالتين معرفتين على $]0,+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2}$

- الصفر هو حاد لمجموعة تعريف f .

مهما كانت قيمة العدد الحقيقي M كبيرة فالأعداد $f(x)$ تتجاوز قيمة M

من أجل كل قيمة لـ x من $]0,\frac{1}{M}[$ لأن المتباينة $\frac{1}{x}>M$ تكون صحيحة

عندما يكون $0<x<\frac{1}{M}$ و نكتب $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=+\infty$

- بنفس الكيفية السابقة نبين أن $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

2 - 2 النهاية الحقيقية (المنتهية) عند a

نقول أن العدد الحقيقي ℓ هو نهاية الدالة f لما x يقترب من a

يعني أن كل مجال مفتوح مركزه L يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a (أي من المجال $]a-\alpha,a+\alpha[$ و من D_f)

و نكتب $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

هذا التعريف يعني أن المسافة بين $f(x)$ و ℓ تقترب من الصفر.

لذن $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ تعني أن $\lim_{x\to a}|f(x)-\ell|=0$

نتيجة

إذا كان a من D_f و f لها نهاية ℓ عند a فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

خاصية

إذا كانت f لها نهاية ℓ عند a فإن هذه النهاية وحيدة

مثال :

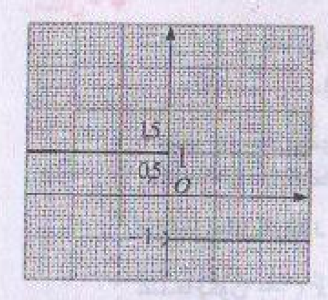
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad ، \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

يمكننا أن نثبت صحة هاتين النهايتين باستعمال نظرية الحصر .

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون لدالة نهاية عند قيمة من مجموعة تعريفها

مثال :



f دالة تمثيلها البياني كما في الشكل

$f(0)=1$ لكن 1 ليس نهاية لـ f لما x يؤول إلى الصفر.

لأن باعتبار المجال المفتوح $I=]0,5 \,،\, 1,5[$ فإنه من أجل كل قيم x القريبة من الصفر و أكبر تماما منه يكون $f(x)=-1$ لكن -1 لا ينتمي إلى المجال I .

• النهاية من اليمين و من اليسار عند a

يحصل و أن دالة لا تقبل نهاية (حقيقية أو غير منتهية) عند a لكن اقتصارها على مجال من الشكل $]a,b[$ لها نهاية ℓ عند a .

نقول عندئذ أن f لها نهاية من اليمين عند a و نكتب $\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x)=\ell$

بنفس الطريقة إذا كان اقتصار f على المجال $]c,a[$ يقبل نهاية ℓ عند a نقول أن f تقبل نهاية من اليسار عند a و نكتب $\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x)=\ell$

مثال :

1) $f:x\mapsto \frac{1}{x}$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=-\infty$

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} \ , \ x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\frac{2x}{x}=2$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{2|x|}{x}=\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{-2x}{x}=-2$$

الدالة f ليس لها نهاية عند الصفر.

تمرين تدريبي 1 .

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\sqrt{x+5}$ لها النهاية 3 عند 4

أوجد مجال I مركزه 3 بحيث إذا كان $x\in I$ فإن $f(x)\in]2,99 \,،\, 3,01[$

✓ الحل :

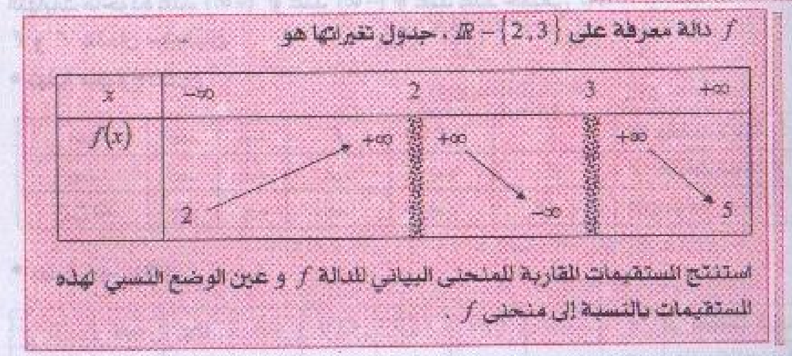
القول أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2,99 \,،\, 3,01[$ يعني $2,99 < f(x) < 3,01$

أي $2,99<\sqrt{x+5}<3,01$ بالتربيع نجد $8,9401<x+5<9,0901$

و بطرح 5 من حدود هذه الأخيرة نجد $3,9401<x<4,0901$ إذن $I=]3,9401 \,،\, 4,0901[$

تمرين تدريبي 2 .

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2,3\}$ ، جدول تغيراتها هو



x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5

استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى البياني للدالة f و عين الوضع النسبي لهذه المستقيمات بالنسبة إلى منحنى f .

✓ الحل :

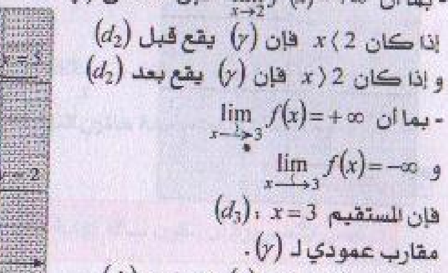
- بما أن $\lim_{x\to -\infty} f(x)=2$ فإن المستقيم (d_1) ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (γ)

و بما انه من اجل كل x من المجال $]-\infty,2[$ لدينا $f(x) > 2$ فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_1)

- بما ان $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (γ) له مستقيم مقارب عمودي (d_2) معادلته $x=2$.

إذا كان $x < 2$ فإن (γ) يقع قبل (d_2)

و إذا كان $x > 2$ فإن (γ) يقع بعد (d_2)



- بما ان $\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x)=+\infty$

و $\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x)=-\infty$

فإن المستقيم (d_3) ؛ $x=3$ مقارب عمودي لـ (γ).

إذا كان $x > 3$ فإن (γ) يقع بعد (d_3)

و إذا كان $x < 3$ فإن (γ) يقع قبل (d_3)

- بما ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$ فإن المستقيم (d_4) ذا المعادلة $y=5$ مقارب افقي لـ (γ)

و بما انه من اجل كل $x\in]3,+\infty[$ لدينا $f(x) > 5$ فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_4).

3 - عمليات على النهايات

لما تكون للدالتين f و g نهايات معروفة نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال :

$f+g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ و نبين مختلف هذه النهايات في الجداول التالية :

النهايات مأخوذة عند $(+\infty)$ او عند $(-\infty)$ او عند عدد حقيقي a.

ℓ و ℓ' عددان حقيقيان

- نهاية مجموع دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

- نهاية جداء دالتين

إذا كانت نهاية f	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ او $-\infty$
فإن نهاية $f\times g$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- نهاية حاصل قسمة دالتين

- حالة نهاية الدالة g غير معدومة

إذا كانت نهاية f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ او $-\infty$
إذا كانت نهاية g	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ او $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ او $-\infty$
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالة نهاية الدالة g معدومة :

إذا كانت نهاية f	$\ell>0$ او $+\infty$	$\ell>0$ او $+\infty$	$\ell<0$ او $-\infty$	$\ell<0$ او $-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

- حالات عدم التعيين هي $+\infty-\infty$ ، $0\times\infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

- نعلم أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة.

- نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة في البسط و كذلك في المقام.

مثال -

1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^2+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$

تمرين تدريبي . 1

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=4x^3-3x^2+x$

احسب النهايتين التاليتين $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

الحل ✓

- لدينا $\lim_{x\to+\infty}4x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

إذن لا نستطيع ان نستنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ (حالة عدم التعيين)

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $(+\infty)$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة و عليه :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 4x^3=+\infty$$

. لدينا $\lim_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} -3x^2=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$

كل حد من المجموع له نهاية $(-\infty)$ و بالتالي نستطيع تطبيق القواعد العملية المتعلقة بمجموع دالتين و عليه فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

تمرين تدريبي 2 :

f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x^3\left(4-\frac{1}{x}\right)$.

ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند الصفر.

✓ الحل :

- نضع $U(x)=x^3$ و $V(x)=4-\frac{1}{x}$ عندئذ $f=U\times V$

$\lim_{x\to+\infty} U(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} V(x)=4$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

. لدينا $\lim_{x\to0} U(x)=0$ و $\lim_{x\to0} V(x)=-\infty$

إذن في هذه الحالة لدينا عدم التعيين و بالتالي لا نستطيع ان نستنتج نهاية $f(x)$ عند 0 .

ويمكن ان نكتب $f(x)=4x^3-x^2$ و منه $\lim_{x\to0} f(x)=0$

تمرين تدريبي 3 :

1) لتكن f الدالة المعرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x^2+x-7}{x^2-3x+2}$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة f

ب) احسب النهايتين $\lim_{x\to2} f(x)$ و $\lim_{x\to1} f(x)$

2) لتكن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $g(x)=\frac{x+2}{x+1+\sqrt{x}}$

احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

✓ الحل

1) أ) f دالة معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2-3x+2\neq0$.

المعادلة $x^2-3x+2=0$ لها حلان هما 1 و 2

وبالتالي مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}-\{1,2\}$.

ب) $\lim_{x\to1}(2x^2+x-7)=-4$ و $\lim_{x\to1}(x^2-3x+2)=0$ إذن يجب معرفة إشارة المقام .

على يسار العدد 1 إشارة المقام موجبة و على يمينه إشارة المقام سالبة و منه

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=+\infty$$

$\lim_{x\to2}(2x^2+x-7)=3$ موجبة و $\lim_{x\to2}(x^2-3x+2)=0$

إذن يجب معرفة إشارة المقام على يسار 2 المقام سالب و على يمينه المقام موجب و منه :

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$$

2) من اجل قيم كبرى لـ x فإن سلوك $x+2$ و $x+1+\sqrt{x}$ من سلوك x لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$$

و بالتالي نستطيع أن نخمن في اول وهلة ان 1 هي نهاية g عند $+\infty$.

و للبرهان على ذلك نضع العنصر المهيمن x كعامل مشترك في البسط و المقام :

من أجل كل $x\neq0$ لدينا $g(x)=\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}$

و منه نستنتج ان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

4 - نظريات المقارنة

4 - 1 نظرية الحصر

مبرهنة 1

اذا كان من اجل كل x من المجال $]\alpha,+\infty[$

لدينا $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

فإن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\ell$ حيث ℓ عدد حقيقي .

الإثبات

ليكن J مجالا مفتوحا كيفيا مركزه ℓ

. بما ان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي A

بحيث من أجل كل $x\rangle A$ يكون $f(x)\in J$.

. بما ان $\lim_{x\to+\infty} h(x)=\ell$ فإنه يوجد عدد حقيقي B

بحيث من اجل كل $x\rangle B$ يكون $h(x)\in J$

إذا اخترنا C عددا حقيقيا بحيث $C\rangle A$ و $C\rangle B$

وكان $x\rangle C$ فإن $f(x)\in J$ و $h(x)\in J$

لكن $f(x)\le g(x)\le h(x)$

إذن $g(x)\in J$ مما يبرهن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\ell$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة (1) تبقى صحيحة إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

نتيجة

إذا كان $f(x)\le g(x)\le h(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\ell$ فإن $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$

مبرهنة 2

f و g دالتان معرفتان على $I=]\alpha,+\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.

إذا كان من أجل كل x من I لدينا $|f(x)-\ell|\le g(x)$

و إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ فإن :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

الإثبات:

المتباينة $|f(x)-\ell|\le g(x)$ تعني أن $\ell-g(x)\le f(x)\le \ell+g(x)$.

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ و حسب القواعد العملية في حساب النهايات فإن :

$\lim_{x\to+\infty}[\ell-g(x)]=\ell$ و $\lim_{x\to+\infty}[\ell+g(x)]=\ell$.

وحسب المبرهنة (1) فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.

مثال -

- احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x-1}{x}$

الحل

- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا $1\ge \sin x\ge -1$

و عليه $\frac{1}{x}\ge\frac{\sin x}{x}\ge\frac{-1}{x}$

و لكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا $1\ge\cos x\ge -1$

و عليه $\frac{-2}{x}\le\frac{\cos x-1}{x}\le 0$ و لكون $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$

فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x-1}{x}=0$.

4-2 المقارنة في اللانهاية

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I=]\alpha,+\infty[$.

1) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x)\ge g(x)$ و إذا كان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x)\le g(x)$ و إذا كان $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

مثال -

احسب $\lim_{x\to+\infty}(x+\sin x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(x+\sin x)$

الحل :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $1\ge\sin x\ge -1$ و منه $1+x\ge x+\sin x\ge -1+x$

- بما أن $\lim_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$ و $f(x)\ge 1+x$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- بما أن $\lim_{x\to-\infty}(-1+x)=-\infty$ و $f(x)\le -1+x$ فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5- نهاية الدالة المركبة

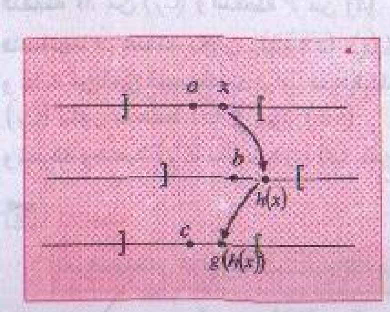
مبرهنة

f ، g ، h ثلاث دوال بحيث $f(x)=g(h(x))$.

كل من الحروف a, b, c تمثل إما أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كانت $\lim_{x\to a} h(x)=b$

و إذا كانت $\lim_{x\to b} g(x)=c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x)=c$



مثال -

1) g و h دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=2x+3$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$

احسب $\lim_{x\to+\infty} g(h(x))$

2) احسب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{x-3}}$

✓ الحل

1) على المجال $[-1,+\infty[$ لدينا $g(h(x))=\sqrt{2x+4}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} g(h(x))=+\infty$

2) نضع $h(x)=X=\frac{3x}{x-3}$ و $g(X)=\sqrt{X}$

ومنه $\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=g(h(x))$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} h(x)=3$ و $\lim_{X\to3} g(X)=\sqrt{3}$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x}{x-3}}=\sqrt{3}$.

6 - المستقيم المقارب المائل

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى .

القول أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=ax+b$ مع $a\neq0$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

يعني أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

التفسير الهندسي

من أجل قيمة x من مجال تعريف الدالة f نعتبر النقطة M من (C_f) و النقطة P من (d) فاصلتهما x عندئذ يكون $PM=|f(x)-(ax+b)|$

و عليه من أجل قيم كبرى لـ x المسافة PM تقترب من الصفر و هذا مما يفسر أن المنحنى (C_f) يكون بمحاذاة (d) في جوار $(+\infty)$.

و لمعرفة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) نعين إشارة $[f(x)-(ax+b)]$

ملاحظة

نعرف بنفس الطريقة المستقيم المقارب المائل بجوار $(-\infty)$

مثال -

- بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{2x^2+3x}{x+1}$
- ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d)

✓ الحل

$$f(x)-(2x+1)=\frac{2x^2+3x}{x+1}-(2x+1)$$

$$=\frac{2x^2+3x-2x^2-3x-1}{x+1}=\frac{-1}{x+1}$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=0$ فإن المستقيم (d) هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $(+\infty)$.

- إذا كان $x < -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} > 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق (d)

و إذا كان $x > -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} < 0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت (d) .

مبرهنة

f دالة بحيث $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ مع a و b عددين حقيقيين و $a\neq0$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $-\infty$

مثال -

f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ و آخر في جوار $(-\infty)$.

✓ الحل

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1=a$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ معادلته $(d_1): y=x$

- بنفس الطريقة نبين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (d_2) معادلته $y=-x$ في جوار $(-\infty)$

7 - الاستمرار

f دالة و I مجال محتوى في D_f

7 - 1 الاستمرار عند عدد و على مجال

- القول أن f مستمرة عند العدد a من I يعني أن f لها نهاية عند a و هذه النهاية بالضرورة $f(a)$ و نكتب $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ أو $\lim_{h\to0} f(a+h)=f(a)$
- القول أن f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل قيمة من I .

نتيجة

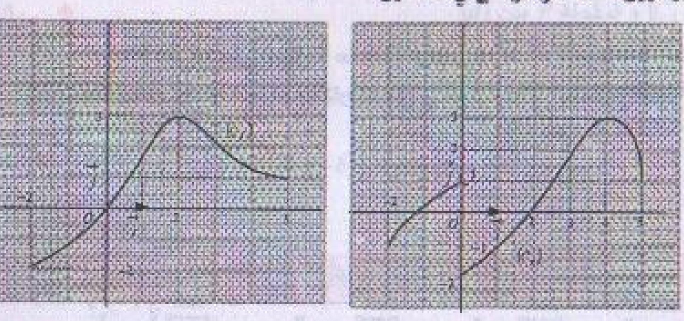
نستنتج من تعريف الاستمرار و القواعد العملية لحساب النهايات أن مجموع ، و جداء و مركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

ملاحظة

دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى .

مثال - 1

f و g دالتان معرفتان على المجال $I=[-2,5]$ ، (C_f) و (C_g) منحناهما البيانيين كما هو موضح في الشكلين.



- الدالة f مستمرة على المجال I لأن (C_f) عبارة عن خط منحن غير متقطع رسمناه بدون رفع القلم .
- الدالة g غير مستمرة على المجال I لأن $\lim_{x\to0} g(x)=1$ و $\lim_{x\to0} g(x)=-2$

إذن g ليست لها نهاية عند $x=0$

مثال - 2

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{|x|-1}{2}$. ادرس استمرار f عند $x=0$

✓ الحل

بما أن $\begin{cases}|x|=x, & x\ge0\\ |x|=-x, & x\le0\end{cases}$

فإن $\begin{cases} f(x)=\frac{x-1}{2}, & x\ge0\\ f(x)=\frac{-x-1}{2}, & x\le0\end{cases}$

$$f(0)=\frac{|0|-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{-x-1}{2}=-\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x-1}{2}=-\frac{1}{2}$

إذن الدالة f لها نهاية $-\frac{1}{2}$ عند $x=0$ و بالتالي فهي مستمرة عند $x=0$

7 - 2 قابلية الاشتقاق و الاستمرار

مبرهنة

- إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a من I فإن f مستمرة عند a
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f مستمرة عل I

الإثبات

f دالة قابلة للاشتقاق عند a يعني أن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لها نهاية $f'(a)$

من أجل كل $x\neq a$ لدينا $g(x)(x-a)=f(x)-f(a)$

ومنه ينتج $f(x)=f(a)+g(x)(x-a)$

و بما أن $\lim_{x\to a} g(x)=f'(a)$ و $\lim_{x\to a}=(x-a)=0$

فإن $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ و هذا يعني أن f دالة مستمرة عند a .

ملاحظة :

إذا كانت دالة مستمرة عند عدد a فلا نستطيع القول أنها قابلة للاشتقاق عند a

مثال -

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=|x|+1$

- الدالة f مستمرة عند الصفر لكن غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لأن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x+1-1}{x}=-1$$

و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

استمرار الدوال المرجعية

- دالة الجذر التربيعي قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ إذن فهي مستمرة على نفس المجال

وبما أن $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0=\sqrt{0}$ فإن هذه الدالة مستمرة عند الصفر

ومنه دالة الجذر التربيعي مستمرة على المجال $[0,+\infty[$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها و بالتالي فهي مستمرة على كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها .

- الدالتان $x\mapsto\sin x$ و $x\mapsto\cos x$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن فهما مستمرتان على $\mathbb{R}$

ملاحظة

كل الدوال المشكلة من دوال مرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.

مثال -

f دالة معرفة بـ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

مجموعة تعريف f هي $\mathbb{R}$ بوضع $g(x)=x^2+1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ يكون $f(x)=hog(x)$

إذن الدالة f هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي فالدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

8 - دراسة دالة الجزء الصحيح

من اجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث $n+1\rangle x\geq n$.

نسمي دالة الجزء الصحيح بالدالة التي نرمز لها بـ E و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال

$[n,n+1[$ العدد الصحيح n و نكتب $E(x)=n$

- نختار بعض القيم لـ x

$E(0)=E(0,25)=E(0,75)=0$

$E(1)=E(1,002)=E(1,999)=1$

$E=(-0,3)=E(-0,5)=-1$

من اجل $E(x)=0 : 1\rangle x\geq 0$

من اجل $E(x)=1 : 2\rangle x\geq 1$

من اجل $E(x)=2 : 3\rangle x\geq 2$

- على المجال $[-2,3[$ يتكون التمثيل البياني للدالة E من خمس قطع مستقيمة ونقطة معزولة .

- الدالة E معرفة عند 2 و على مجال مركزه 2

وبما أن $\lim_{x\to 2}E(x)=1$ و $\lim_{x\to 2}E(x)=2$ فإن الدالة E ليست لها نهاية عند 2

و بالتالي فهي ليست مستمرة عند هذه القيمة وعليه فإنها مستمرة على $]1,2[$

9 - الدوال المستمرة و حلول المعادلات

في حالة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية نستطيع حل المعادلة $f(x)=k$

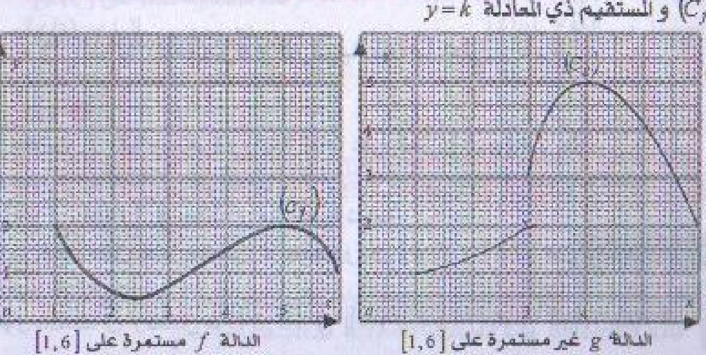
أما في حالة دالة كيفية لا نستطيع تعيين الحل الجبري لذلك نلجأ إلى التحليل الذي يسمح لنا بإيجاد القيم التقريبية للحلول إن وجدت و بالدقة التي نريدها.

و قبل إجراء أي حساب لابد من معرفة هل توجد حلول أم لا.

مثال -

المنحنيان الممثلان في الشكلين المجاورين هما لدالتين f و g المعرفتين على $[1,6]$

الحل البياني للمعادلة $f(x)=k$ هو البحث عن فواصل نقط تقاطع إن وجدت بين (C_f) و المستقيم ذي المعادلة $y=k$



الدالة g غير مستمرة على $[1,6]$ — الدالة f مستمرة على $[1,6]$

- بالنسبة إلى الدالة f من أجل $1 \leq k \leq 2$ المعادلة $f(x)=k$ لها حلول
- بالنسبة إلى الدالة g من أجل كل $1 \leq k \leq 5$ لا توجد حلول للمعادلة $g(x)=k$
لأنه إذا كان $2 < k < 3$ فإن المستقيم $y=k$ لا يقطع المنحنى (C_g) .

9 - 1 نظرية القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$.

من أجل كل عدد حقيقي y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصورة بين a و b بحيث $f(c)=y$.

نعبر عن نتيجة المبرهنة بكيفيتين مختلفتين بفرض أن $f(a) \leq f(b)$ و بوضع $I=[a,b]$ نستطيع القول بطرق متكافئة

- من أجل كل y من المجال $[f(a), f(b)]$ المعادلة $f(x)=y$ ذات المجهول x تقبل على الأقل حلا c من المجال I .
- كل عدد حقيقي y من $[f(a), f(b)]$ هو صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I

صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة مستمرة على I .

صورة $I=[a,b]$ بالدالة f و نرمز لها ب $f(I)$ هي مجموعة كل الأعداد $f(x)$ لما x يمسح I

ملاحظة

المجال $[f(a), f(b)]$ محتوى في $f(I)$

9 - 2 الدالة المستمرة و الرتيبة تماما على $[a,b]$

مبرهنة 1

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال $I=[a,b]$ فإن ،

1) صورة I بالدالة f هي المجال $[f(a), f(b)]$ في حالة f متزايدة تماما و $[f(b), f(a)]$ في حالة f متناقصة تماما

2) من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x)=k$ حلا وحيدا في $[a,b]$.

نقول عندئذ أن f تقابل من $[a,b]$ في $[f(a), f(b)]$ أو في $[f(b), f(a)]$

الإثبات

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على I و k عددا حقيقيا من المجال $[f(a), f(b)]$

1) من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$

إذن كل صورة $f(x)$ تنتمي إلى $[f(a), f(b)]$

و هذا معناه $f(I) \subset [f(a), f(b)]$ .... (1)

و بالعكس إذا كان $y \in [f(a), f(b)]$ فإن :

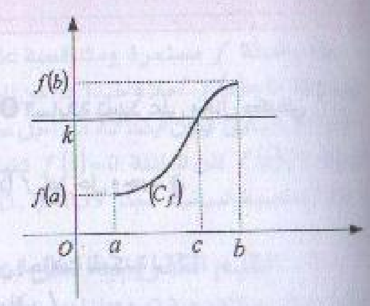
y هي صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I إذا $y \in f(I)$

و هذا معناه $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ .... (2)

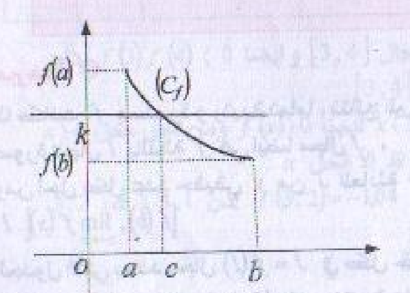
من (1) و (2) نجد أن $f(I) = [f(a), f(b)]$

2) حسب نظرية القيم المتوسطة نستطيع إيجاد عدد c من $I=[a,b]$ بحيث $f(c)=k$.
لأن المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا في المجال I و هذا الحل يكون وحيدا لأنه إذا كان لدينا عددان حقيقيان c و c' من I و $c < c'$ بحيث $f(c)=f(c')=k$ فإن f ليست متزايدة وهذا تناقض حيث f متزايدة تماما على I .

نتيجة المبرهنة تبقى صحيحة إذا كانت f متناقصة تماما على $[a,b]$



f دالة متزايدة تماما على $[a,b]$
مجموعة الوصول هي $[f(a), f(b)]$



f دالة متناقصة تماما على $[a,b]$
مجموعة الوصول هي $[f(b), f(a)]$

ملاحظة

إذا كانت $f(a)=k$ فإن $c=a$ و إذا كان $f(b)=k$ فإن $c=b$

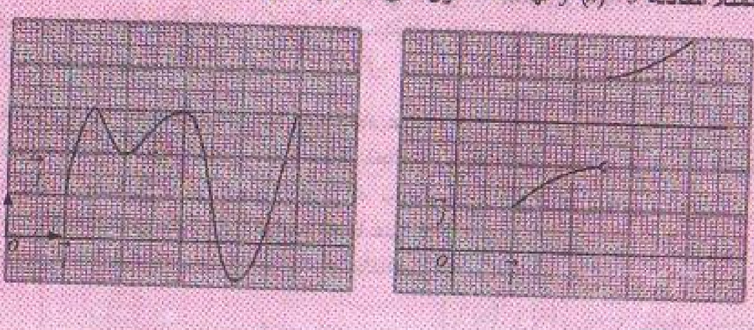
نتيجة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على $I=[a,b]$ و إذا كانت $f(a)f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا في I .

ملاحظة

1) إذا كانت الدالة f ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونا كما يبينه الشكل (1) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ ليس لها حل.

2) وحدانية الحل مضمونة بالرتابة التامة (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) فإذا كانت الرتابة غير تامة نستطيع أن نتحصل على عدة حلول كما يبينه الشكل (2) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ لها عدة حلول على المجال $[1,5]$.



مبرهنة 2

إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما ، نتائج المبرهنة 1 السابقة تمدد على مجال كيفي I .
صورة المجال I بالدالة f هي أيضا مجال J ،
ومن أجل كل عدد حقيقي y من J المعادلة $f(x)=y$ لها حل وحيد في I . $[f(b), \lim_{x\to a} f(x)[$

الجدول الآتي يحدد مجال $J=f(I)$ في كل حالة من الحالات الممكنة لـ I .
نتقبل أن f لها نهاية حقيقية أو غير منتهية على أطراف I
وسنريك في الجدول التالي المجال J حيث a و b تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

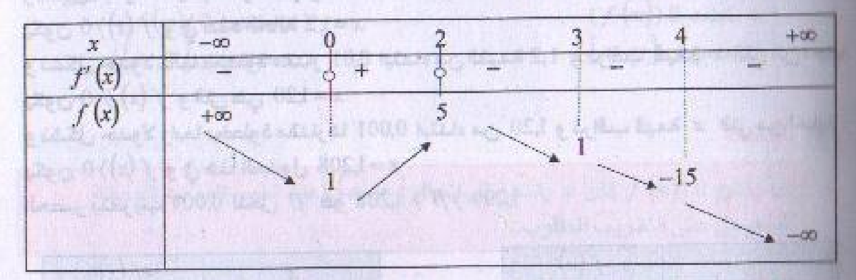
صورة I بالدالة f هو المجال		
f متناقصة تماما على I	f متزايدة تماما على I	$I=$
$[f(b), f(a)]$	$[f(a), f(b)]$	$[a,b]$
$[f(b), \lim_{x\to a} f(x)[$	$]\lim_{x\to a} f(x), f(b)]$	$]a,b]$
$]\lim_{x\to b} f(x), f(a)]$	$[f(a), \lim_{x\to b} f(x)[$	$[a,b[$
$]\lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} f(x)[$	$]\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x)[$	$]a,b[$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على IR بالعبارة $f(x)=-x^3+3x^2+1$
برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in[3,4]$ ثم أعط حصرا له بتقريب 10^{-1}

الحل

الجدول التالي يلخص لنا دراسة الدالة f



x	$-\infty$		0		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	1	↘	-15	↘	$-\infty$

. بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[3,4]$ و أيضا $f(3)f(4)<0$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $[3,4]$.
. الجدول السابق يبين أيضا أنه من أجل كل $x<3$ لدينا $f(x)>0$ ومن أجل كل $x>4$ لدينا $f(x)<0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في IR إلا الحل α .
بالآلة الحاسبة البيانية نجد $f(3,1)=0,39$ و $f(3,2)=-1,04$ إذن $3,1<\alpha<3,2$

9-3 القيم التقريبية لحل معادلة

نظرية القيم المتوسطة تسمح لنا بواسطة الحصر المتوالي بتحديد القيم القريبة من حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال المغلق $I=[a,b]$
نفرض أن $f(a)<0$ و $f(b)>0$ و ليكن $x\in[a,b]$.

طريقة المسح

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[a,b]$ و نقوم بحساب قيم f ابتداء من $f(a)$ بخطوة مقدارها p على النحو التالي ،
$f(a+p)$ ، $f(a+2p)$ ، ..... حتى نتحصل على القيمة الموجبة $f(a+kp)$ مع $k\in IN$.
من القيمة d التي تسبق $a+kp$ نبدل الخطوة p بالخطوة p' حيث $p'=\frac{p}{10}$ و نتابع الحسابات بالكيفية السابقة $f(a+p')$ ، ......
نكمل هذه العملية حتى نتحصل على التقريب المطلوب للحل.

مثال - ♦

من اجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$. اوجد حصرا بتقريب 0,001 للحل β ، حيث β محصورة بين 0 و 4 .

✓ الحل

نشكل اولا جدولا من عمودين الأول لـ x و الثاني لـ $f(x)$ حيث $f(x)=x^3-6x^2+7$.
ابتداء من الصفر بخطوة $p=1$ نراقب قيمة x التي من اجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذه الحالة تكون $x=1$.
ونشكل جدولا ثانيا بخطوة مقدار 0,1 . ابتداء من القيمة 1 و نراقب قيمة x التي من اجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذه الحالة $x=1,2$
و نشكل جدولا ثالثا بخطوة مقدار 0,01 ابتداء من القيمة 1,2 و نراقب قيمة x التي من اجلها يكون $f(x)\langle 0$ و التي هي $x=1,20$
و نشكل جدولا رابعا بخطوة مقدارها 0,001 ابتداء من 1,20 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x)\langle 0$ و في هذا الجدول $x=1,208$
الحصر بتقريب 0,001 للحل β هو $1,208 \langle \beta \langle 1,209$

x	$f(x)$
0	7
1	2
2	-9

$p=1$
$1\langle\beta\langle 2$

x	$f(x)$
1	2
1,1	1,071
1,2	0,088
1,3	-0,943

$p=0,1$
$1,3\langle\beta\langle 1,2$

x	$f(x)$
1,2	0,088
1,21	-0,0131

$p=0,01$
$1,21\langle\beta\langle 1,20$

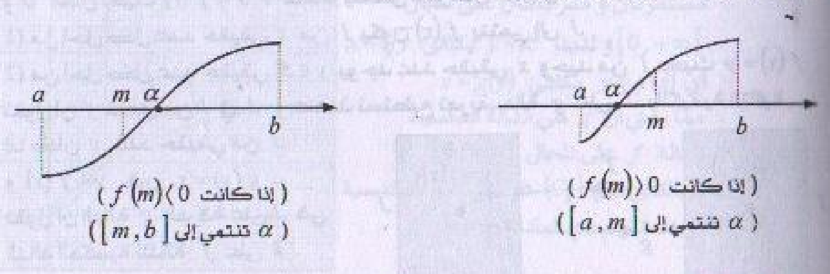
x	$f(x)$
1,200	0,0880
1,201	0,0779
1,204	0,0480
1,206	0,0276
1,207	0,0176
1,208	0,072
1,209	-0,01

$p=0,001$

طريقة ديكتومي (القسمة على اثنين)

نقسم المجال $[a,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ، و نحسب $f(m)$ حيث m منتصف المجال $[a,b]$
إشارة $f(m)$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[a,m]$ او إلى $[m,b]$.

ـ إذا كان $f(m)\langle 0$ فإن α ينتمي إلى $[m,b]$ و في هذه الحالة نعيد قسمة المجال $[m,b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول و نحسب $f(m')$ حيث $m'=\frac{m+b}{2}$.
ـ إشارة $f(m')$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[m',b]$ او إلى $[m,m']$ و هكذا نعيد عملية قسمة المجالات حتى نحصل على التقريب المطلوب .



(إذا كانت $f(m)\rangle 0$)
(α تنتمي إلى $[a,m]$)

(إذا كانت $f(m)\langle 0$)
(α تنتمي إلى $[m,b]$)

ملاحظة

إذا كان $f(m)\rangle 0$ فإن α ينتمي إلى المجال $[a,m]$ نعيد نفس العملية السابقة للحصول على التقريب المطلوب .

مثال - ♦

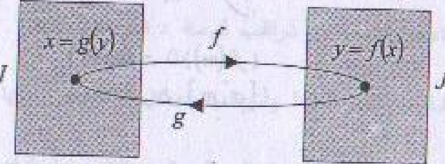
من اجل المعادلة $x^3-6x^2+7=0$. اوجد حصرا بتقريب 0,1 للحل β حيث $4\rangle\beta\rangle 0$

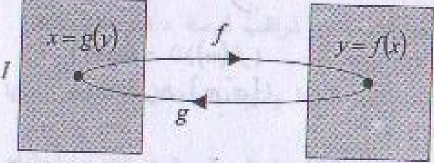
✓ الحل

نضع $f(x)=x^3-6x^2+7$ ، $I=[a,b]=[0,4]$ ، $f(0)=7$ ، $f(4)=-25$
. بقسمة المجال $[0,4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول نحصل على $[0,2]$ و $[2,4]$
لدينا $m=\frac{0+4}{2}=2$ و $f(m)=f(2)=-9$
بما أن $f(m)\langle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى المجال $[0,2]$
. نقسم المجال $[0,2]$ إلى مجالين لهما نفس الطول فنحصل على $[1,2]$ ، $[0,1]$
لدينا $m'=1$ و $f(m')=2$
بما أن $f(m')\rangle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1,2]$
. نقسم المجال إلى $[1,2]$ إلى مجالين $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ ، $\left[\frac{3}{2},2\right]$.
لدينا $m''=\frac{3}{2}$ و $f(m'')=-3,125$
بما أن $f(m'')\langle 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1 ، 1,5]$ و منه $1,0\langle\beta\langle 1,5$.

10 - مفهوم الدالة العكسية

f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال كيفي I
و J مجال بحيث $J = f(I)$. عندما يتحقق الشرطان التاليان معا :
1) من اجل كل عدد حقيقي x من I يكون $f(x)$ ينتمي الى J
2) من اجل كل عدد حقيقي $y \in J$ يوجد عدد حقيقي x وحيد من I بحيث $f(x) = y$.
نقول ان f تقابل من I في J و عندئذ نستطيع تعريف دالة g على J بالكيفية التالية :
إذا كان y عدد حقيقي من J
و $y = f(x)$ فإن $g(y) = x$.
نقول أن الدالة g المعرفة على J هي
الدالة العكسية للدالة f على I .





نتيجة

من اجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $g(f(x)) = x$ ومن اجل كل عدد حقيقي y من J لدينا $f(g(y)) = y$

ملاحظة

الدالة العكسية للدالة g هي الدالة f .

التمثيل البياني للدالة العكسية

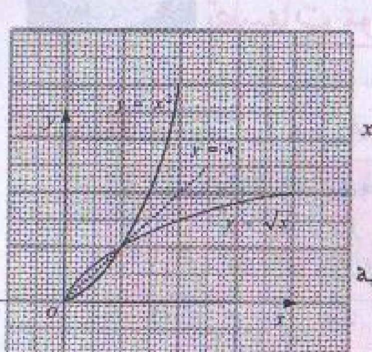
f دالة معرفة على I و تاخذ قيمها في J
و g الدالة العكسية لها .
إذن من اجل كل x من I ومن اجل كل y من J
$f(x) = y$ تكافئ $x = g(y)$.
(C_f) و (C_g) المنحنيان الممثلان للدالتين f و g
على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

(C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى المستقيم
ذي المعادلة $y = x$.
القول ان النقطتين $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة
$y = x$ يكافئ القول ان $x' = y$ و $y' = x$.
نفرض ان M نقطة كيفية من (C_f) إحداثيتاها $(x, f(x))$ ونظيرتها بالنسبة إلى
المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هي $M'(x', y')$ حيث $x' = f(x)$ و $y' = x$ و بما ان M تنتمي
إلى (C_f) فإن $x = g(y)$ و $y = f(x)$ إذن :

إحداثيتا M' هي $(y, g(y))$ مما يبين أن M' تنتمي إلى (C_g)
بنفس الطريقة نبين انه إذا كانت M' من (C_g) فإن نظيرتها M من (C_f) .

مثال -

الدالتان $f : x \mapsto x^2$ و $g : x \mapsto \sqrt{x}$
مستمرتان و متزايدتان على المجال
$[0, +\infty[$ و لدينا $y = x^2$ يكافئ $x = \sqrt{y}$
اي $y = f(x)$ يكافئ $x = g(y)$
مما يعني أن g هي الدالة العكسية
للدالة f على المجال $[0, +\infty[$
و بالتالي فإن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة
إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$



تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة على المجال $[2, 5]$ كما يلي $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$
بين أن f تقبل دالة عكسية g يطلب تحديد مجموعة بدئها و مجموعة وصولها، ثم أوجد عبارتها.

✓ الحل

. الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالتالي فهي مستمرة على $[2, 5]$
. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي قابلة للاشتقاق على $[2, 5]$ و من اجل كل
$x \in [2, 5]$ لدينا $f'(x) = 4x - 4$
من اجل كل x من $[2, 5]$ لدينا $f'(x) \rangle 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[2, 5]$

إذن الدالة f تقابل من $[2, 5]$ في $[f(2), (5)]$ و بالتالي تقبل دالة عكسية مجموعة
بدئها $[f(2), f(5)] = [-6, 24]$ ومجموعة وصولها $[2, 5]$.
$y = f(x)$ يكافئ $y = 2x^2 - 4x - 6$ يكافئ $2x^2 - 4x - 6 - y = 0$
نضع $2x^2 - 4x - 6 - y = 0$ .... (1)
مميز المعادلة (1) ذات المجهول x هو $\Delta = 4(16 + 2y)$
بما ان $y \in [-6, 24]$ فإن $\Delta \rangle 0$ ومنه المعادلة (1) لها حلان هما :

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16 + 2y}}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{2 - \sqrt{16 + 2y}}{2}$$

x_2 مرفوض لان من اجل $y = -6$ نجد $x_2 = 0$ و $0 \notin [2, 5]$
إذن الدالة g معرفة على $[-6, 24]$ بـ $g(y) = x_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16 + 2y}}{2}$

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 — حساب النهايات

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=4x^3-2x-1$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2) $f(x)=-x^4+3x^2+7$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$

3) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 2

4) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x+3}$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ و عند -3

5) $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x-2}$ عند $+\infty$ و $-\infty$ و عند 2

6) $f(x)=x^2+3-\dfrac{2}{(x-4)^2}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ و عند 4

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^4)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x^4)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$ و $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ إذن لتعيين $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ تعين إشارة $(x-2)$

إذا كان $x>2$ فإن $x-2>0$ و إذا كان $x<2$ فإن $x-2<0$

إذن $\lim\limits_{x\to2^{-}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to2^{+}} f(x)=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to-3}(x^2+3x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$

فإن نهاية f في جوار 3 هي من الشكل $\dfrac{0}{0}$

من أجل $x\neq-3$ يكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{x(x+3)}{x+3}=x$

ومنه $\lim\limits_{x\to-3^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to-3^{+}} f(x)=-3$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$

فحسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{(x-4)^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+3)=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

تطبيق 2 — حساب النهايات لدوال ناطقة

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ عند $-\infty$ ، $+\infty$ ، 1 ، 5

2) $f(x)=\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$ عند 2

3) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)}$ عند $+\infty$ و عند 2

4) $f(x)=\dfrac{|x^2-x|}{x^2+x-2}$ عند $+\infty$ ، $-\infty$ ، 1

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3$ ، $\lim\limits_{x\to5}(x+2)=7$ و $\lim\limits_{x\to1}(x^2-6x+5)=\lim\limits_{x\to5}(x^2-6x+5)=0$

إذن لتعيين نهاية f عند 1 أو عند 5 لابد من معرفة إشارة المقام.

- من أجل كل عدد حقيقي $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$

و من أجل كل عدد حقيقي $x<1$ لدينا $x^2-6x+5>0$

ومنه $\lim\limits_{x\to1^{-}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^{+}} f(x)=-\infty$

- من أجل كل عدد حقيقي $x>5$ لدينا $x^2-6x+5>0$

ومن أجل كل عدد حقيقي $1<x<5$ لدينا $x^2-6x+5<0$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 5} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 5} f(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 2} (x^4-16) = \lim\limits_{x\to 2} (x^3-8) = 0$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq 1$ تكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

إذن $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{15}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-2) = +\infty$

إذن نهاية f من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-2}\times\sqrt{x-2}}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)}{x(x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = \lim \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} x\sqrt{x-2} = 0^+$

4)
$$\begin{cases} |x^2-x| = -x^2+x, & x\in[0\ ,\ 1] \\ |x^2-x| = x^2-x, & x\in]-\infty, 0]\cup[1, +\infty[\end{cases}$$

و منه الدالة $f(x)$ تكتب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2+x-2}\ , & x\in[0, 1] \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2}\ , & x\in]-\infty\ ,\ 0]\cup[1\ ,\ +\infty[\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{-x}{x+2} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$$

تطبيق 3 حساب النهايات لدوال جذرية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند 1 ، ب) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ عند $+\infty$

جـ) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$ ، د) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند 1

✓ الحل

أ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - \infty$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

لأن ، $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x}}{x}} = 1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$

د) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(-5)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4})} = \lim_{x\to 1} \frac{-5(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}} = -\frac{10}{3}$$

تطبيق 4 حساب النهايات لدوال مثلثية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{\sin 6x}{x}$ عند 0 ، ب) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ عند 0 و عند $+\infty$

جـ) $f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x}$ عند 0 ، د) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند 0

الحل ✓

أ) $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{6\sin 6x}{6x}=6\lim\frac{\sin 6x}{6x}=6\times1=6$$

ب) $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{x}\sin 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to0}2\sqrt{x}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=0\times1=0$$

- من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $-1\le\sin(2x)\le1$

و منه $\frac{-1}{\sqrt{x}}\le\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$

فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

جـ) $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين.

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ و $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

إذن $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}2\cos\frac{x}{2}\times\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}=2$$

لأن $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ و $\lim_{x\to0}2\cos\frac{x}{2}=2$

د) $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}2\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

تطبيق 5 حساب النهايات

عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{5x-2}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد المجال I بحيث إذا كان x ينتمي إلى I فإن $f(x)>10^2$

الحل ✓

$\lim_{x\to1}(5x-2)=3$ و $\lim_{x\to1}(x-1)^2=0^+$ و منه $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$

$f(x)>10^2$ يكافئ $\frac{5x-2}{(x-1)^2}>10^2$ يكافئ $10^2x^2-205x+102<0$

$\Delta=(205)^2-4\times100(102)=1225$

$x_1=\frac{205+35}{100}=\frac{240}{100}=2,4$ ، $x_2=\frac{205-35}{100}=\frac{170}{100}=1,7$

x	$-\infty$		1,7		2,4		$+\infty$
$10^2x^2-205x+102$		+	0	-	0	+	

حتى يكون $10^2x^2-205x+102<0$ يجب أن يكون $x\in]1,7 ; 2,4[$ أي $1,7<x<2,4$

إذن المجال $I=]1,7 ; 2,4[$

تطبيق 6 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث أنه من أجل كل x لدينا (1)..... $1\le f(x)\le2$

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة $g(x)=\frac{3f(x)+5}{x^3}$

اعط حصرا لـ $g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}g(x)$

الحل ✓

بضرب المتباينة (I) بالعدد 3 نجد $3\le3f(x)\le6$ و بإضافة 5 إلى حدود هذه الأخيرة نجد $8\le3f(x)+5\le11$ ... (II)

بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد الموجب تماما x^3 نجد $\frac{8}{x^3}\le g(x)\le\frac{11}{x^3}$

و بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد السالب تماما x^3 نجد $\frac{11}{x^3}\le g(x)\le\frac{8}{x^3}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{11}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8}{x^3}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{11}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

تطبيق 7 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\sqrt{2+x}-\sqrt{x}$

1) تحقق من أن $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

2) استنتج أن $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ ثم احسب نهاية f عند $+\infty$

✓ الحل

1) $f(x)=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{x})}=\frac{(2+x)-(x)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}$

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x}$ أي $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\ge 2\sqrt{x}$

و منه $f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ ... (1)

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\le 2\sqrt{x+2}$

و منه $f(x)\ge\frac{2}{2\sqrt{x+2}}$ أي $f(x)\ge\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ ... (2)

من (1) و (2) نجد $\frac{1}{\sqrt{x+2}}\le f(x)\le\frac{1}{\sqrt{x}}$

• بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

تطبيق 8 حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}$

1) بين أن $\frac{1}{4}\le\frac{1}{3-\cos x}\le\frac{1}{2}$ ... (I)

2) استنتج حصرا لـ $f(x)$ من أجل كل $x>\frac{1}{2}$ ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

✓ الحل

1) نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le-\cos x\le 1$

بإضافة 3 إلى حدود المتباينة الأخيرة نجد $2\le 3-\cos x\le 4$ و بالقلب نجد:

$\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3-\cos x}\ge\frac{1}{4}$ .... (1)

2) بإضافة $2x$ إلى حدود المتباينة $1\ge\sin x\ge-1$ نجد:

$1+2x\ge 2x+\sin x\ge -1+2x$ .... (2)

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$\frac{1}{2}(1+2x)\ge\frac{2x+\sin x}{3-\cos x}\ge\frac{1}{4}(-1+2x)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4}(-1+2x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تطبيق 9 دراسة وضعية المنحني بالنسبة إلى مستقيم مقارب

ادرس النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 للدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{3x}{x+2}$

ثم حدد وضعية المستقيم المقارب الأفقي بالنسبة إلى المنحنى الدالة f.

✓ الحل

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=3$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=3$

$\lim\limits_{x\underset{<}{\to}-2}\frac{3x}{x+2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}-2}\frac{3x}{x+2}=-\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=3$ مقارب أفقي لـ (C_f)

و لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) ندرس إشارة $f(x)-y$ على D_f

$f(x)-y=f(x)-3=\frac{3x}{x+2}-3=\frac{3x-3x-6}{x+2}=\frac{-6}{x+2}$

• إذا كان $x>-2$ فإن $\frac{-6}{x+2}<0$

و منه المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (d)

• إذا كان $x<-2$ فإن $\frac{-6}{x+2}>0$

و منه المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (d)

تطبيق 10 حساب النهايات باستعمال الدالة المركبة

احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$ عند 5 ، 2) $f(x)=\cos\pi x+\frac{1}{(x-2)^2}$ عند 2

3) $f(x)=(x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1})^3$ عند $+\infty$ ، 4) $f(x)=\sin(\frac{\pi x+2}{2x+3})$ عند $-\infty$

الحل

1) نضع $X=\frac{x+2}{x-4}$ و منه $f(x)=\sqrt{X}$

$\lim_{x\to5}X=\frac{7}{1}=7$ و منه $\lim_{x\to5}f(x)=\sqrt{7}$

2) $\lim_{x\to2}\cos\pi x=1$ و $\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

وحسب قواعد العملية لجمع النهايات نجد $\lim_{x\to2}f(x)=1+\infty=+\infty$

3) نضع $X=x-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$ منه $f(x)=X^3$

$\lim_{x\to+\infty}X=\lim_{x\to+\infty}x(1-\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{(x-1)x})=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-1)x}=0$

و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}X^3=+\infty$

4) بوضع $X=\frac{\pi x+2}{2x+3}$ فيكون $\lim_{x\to-\infty}X=\lim\frac{\pi x}{2x}=\frac{\pi}{2}$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

تطبيق 11 تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة بالعبارة $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-d}$ و (C_f) منحناها البياني

عين الأعداد الحقيقية c, b, a بحيث المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا عموديا و يقبل عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y=3x-4$ و يمر بالنقطة $A(2,3)$

الحل

المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x=4$ مقاربا له هذا معناه أن $4-d=0$ أي $d=4$

بما أن $y=3x-4$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لـ (C_f) فإن $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$

و بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ فإن $a=3$

بما أن $\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-3x)=b$ و $\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-3x)=-4$ فإن $b=-4$

$A(2,3)$ تنتمي إلى (C_f) هذا معناه $f(2)=3$

$f(2)=3$ يكافئ $2a+b+\frac{c}{2-d}=3$ يكافئ $c=-2$

إذن $f(x)=3x-4-\frac{2}{x-4}$

تطبيق 12 تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل لمنحني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) أثبت أن (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقاربا مائلا لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (d)

2) هل المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

الحل

1) أ) (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}-1=0$$

إذن (d) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) ندرس إشارة المقدار $f(x)-(x+1)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1$

نلاحظ أنه إذا كان $x\le0$ فإن $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1\le0$ و في هذه الحالة المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

- إذا كان $x \rangle 0$ فإن $f(x)-(x+1)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{-9}{(x+\sqrt{x^2+9})\sqrt{x^2+9}}$

بما ان $x+\sqrt{x^2+9} \rangle 0$ و $\sqrt{x^2+9} \rangle 0$ فإن $f(x)-(x+1) \langle 0$

ومنه المنحني (C_f) يقع تحت (d)

2) نلاحظ انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$

اي ان f فردية وبالتالي نظير المستقيم (d) بالنسبة إلى مبدأ المعلم هو $d' : y=x-1$

إذن $y=x-1$ هي فعلا معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$

تطبيق 13 تعيين المنحنى المقارب لمنحني

المنحني المقارب f دالة معرفة على $]-1 , +\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}$ و (C_f) منحناها البياني اوجد معادلة منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f)

✓ الحل

لما x يؤول الى $+\infty$ فإن $f(x)$ تسلك سلوك $\frac{x^4}{x^2}$ اي x^2 و لا تسلك سلوك $ax+b$

لان لا يمكن ايجاد مستقيم مقارب من الشكل $y=ax+b$ لـ (C_f) و عليه ندرس $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x^2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x^2-2)]=0$

و منه نستنتج ان المنحني ذا المعادلة $y=x^2-2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

بما ان $f(x)-(x^2-2)=\frac{-1}{x^2+1}$ و $\frac{-1}{x^2+1} \langle 0$ فإن (C_f) يقع تحت المنحنى المقارب.

تطبيق 14 تعيين المستقيمات المقاربة لمنحن

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x+\sqrt{|9x^2-1|}$ و تمثيلها البياني (C_f)

1) حدد نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

2) ا) احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)$ ، ب) احسب $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)$

جـ) استنتج ان (C_f) له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما ؟

✓ الحل

1) • $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|}$

$=\lim_{x\to+\infty}x+|x|\sqrt{\left|9-\frac{1}{x^2}\right|}$

$=\lim_{x\to+\infty}x(1+\sqrt{\left|9-\frac{1}{x^2}\right|}=+\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{|9x^2-1|}=\lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{\left|9-\frac{1}{x^2}\right|})$

$=\lim_{x\to-\infty}(x-x\sqrt{\left|9-\frac{1}{x^2}\right|})=\lim_{x\to-\infty}x(1-\sqrt{\left|9-\frac{1}{x^2}\right|})=+\infty$

2) ا) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{(9x^2-1)}-4x)=\lim_{x\to+\infty}(-3x+\sqrt{(9x^2-1)}$

$-3x+\sqrt{9x^2-1}=\frac{(-3x+\sqrt{9x^2-1})\times(-3x-\sqrt{9x^2-1}}{(-3x-\sqrt{9x^2-1})}$

$=\frac{9x^2-9x^2+1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}=\frac{1}{-3x-\sqrt{9x^2-1}}$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-4x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-3x-\sqrt{x^2-1}}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{-1+9x^2}+2x)=\lim_{x\to-\infty}(3x+\sqrt{1+9x^2})$

لدينا $3x+\sqrt{-1+9x^2}=\frac{(3x+\sqrt{-1+9x^2})(3x-\sqrt{-1+9x^2})}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=\frac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}$

وعليه $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{+1}{3x-\sqrt{-1+9x^2}}=0$

جـ) من (ب) و (جـ) نستنتج ان (C_f) له مستقيمين مقاربين مائلين هما :

$(d_1): y=-2x$ في جوار $(-\infty)$ و $(d_2): y=4x$ في جوار $(+\infty)$

تطبيق 15 تعيين حلول معادلة

f دالة معرفة على $I=[0,3]$ بالعبارة $f(x)=\frac{1}{x+2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عين $f(I)$

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$ على I ؟

✓ الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,3]$ و من اجل كل x من I لدينا $f'(x)=\frac{-1}{(x+2)^2}$ و منه :

من اجل كل x من I

لدينا $f'(x) < 0$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على I

$f(0)=\frac{1}{2}$ و $f(3)=\frac{1}{5}$

x	0	3
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$0,5$ ↘	$\frac{1}{5}$

من جدول تغيرات f نستنتج ان

$f(I)=\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$

2) بما ان الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على I و $\frac{1}{4}$ ينتمي الى $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right]$ فإن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α للمعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$

تطبيق 16 تعيين حلول معادلة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة التالية $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1) احسب $f(-1)$, $f(\frac{-1}{2})$, $f(0)$, $f(1)$

2) استنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية على المجال $[-1,1]$

✓ الحل

1) $f(-1)=\frac{-3}{2}$, $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, $f(0)=\frac{-1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{2}$

2) الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[-1,1]$ لأنها دالة كثيرة حدود

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-1,1]$ و لدينا $f'(x)=12x^2-3$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=\frac{1}{2}$ أو $x=-\frac{1}{2}$

$f'(x)$ ينعدم عند $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ مغيرا إشارته بجوارهما و بالتالي f ليست رتيبة على المجال $[-1,1]$

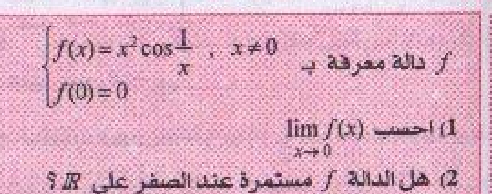
$f(-1)\times f(-\frac{1}{2}) < 0$

وحسب نظرية القيم التوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ للمعادلة $f(x)=0$

$f(-\frac{1}{2})f(0) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد β على المجال $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ للمعادلة $f(x)=0$

• $f(0)f(\frac{1}{2}) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد γ للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $[0,1]$ و بالتالي نستنتج ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في $[-1,1]$

تطبيق 17 دراسة استمرار دالة



f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\cos\frac{1}{x} , & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2) هل الدالة f مستمرة عند الصفر على $\mathbb{R}$؟

✓ الحل :

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1$ ومنه $-x^2\le x^2\cos\frac{1}{x}\le x^2$

و بما ان $\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}-x^2=0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

2) بما ان الدالة f معرفة عند الصفر و f لها نهاية وحيدة عند الصفر فإن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ وعليه فإن الدالة f مستمرة عند 0

الدالتان $x\xrightarrow{g}\frac{1}{x}$ و $x\xrightarrow{h}\cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}^*$

و بالتالي الدالة المركبة hog مستمرة على $\mathbb{R}^*$ $(hog(x)=\cos\frac{1}{x})$

الدالة $x\to x^2$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$

إذن جداء الدالتين $x\to x^2$ و hog مستمرة على $\mathbb{R}^*$ و عليه فإن f مستمرة على $\mathbb{R}$

تمارين و مسائل

1- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=-4x^4+5$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) $f(x)=-x^4-x^2-x+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

3) $f(x)=\frac{-x+5}{2x+1}$ عند $+\infty, -\infty, -\frac{1}{2}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ عند $-\infty, +\infty$

5) $f(x)=-5x+4+\frac{1}{2x+1}$ عند $-\infty$ ، $+\infty, -\frac{1}{2}$

6) $f(x)=\frac{3x^2}{(x-3)(1-x)}$ عند $-\infty, +\infty, 1, 3$

7) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{(x-1)(4-x)}$ عند $-\infty, +\infty, 1, 4$

2- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{x+3}{2x^2+x-1}$ عند $-\infty, +\infty, -1, +\frac{1}{2}$

2) $f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ ، -2 ، 2

3) $f(x)=\frac{x-3}{x\sqrt{x-3}}$ عند $+\infty, 3$

4) $f(x)=\frac{|x|(x-1)}{x^2+|x|-2}$ عند $+\infty, -\infty, -1, 1$

3- أدرس نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ عند $-\infty, +\infty$

2) $f(x)=\sqrt{x^2+4}-2x+1$ عند $-\infty, +\infty$

3) $f(x)=\frac{-x+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}$ عند 0 ، $+\infty$

4- f و g دالتان معرفتان على $]-\infty, -2]\cup[2, +\infty[$ بالعبارتين :

$f(x)=\sqrt{x^2-4}-x$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}+x$

برهن أن $f(x)\times g(x)=-4$ وما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ ؟ وما هي أيضا نهاية f عند $(-\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(-\infty)$ ؟

5- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$ بين الجمل الصحيحة من الخاطئة برر ذلك :

أ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ، ب) الدالة f زوجية ، ج) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)$

د) $f(x)>0$ من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم ، هـ) $\lim_{x\to 2} f(x)=6$

6- أحسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{\tan(x)}{x}$ عند 0 ، 2) $f(x)=\frac{1-\cos 2x}{x^2}$ عند 0

3) $f(x)=\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$ عند 0 مع α و β حقيقيان غير معدومين

4) $f(x)=\frac{\tan x+\sin x}{x^3}$ عند 0 ، 5) $f(x)=\frac{\sin 2x}{3x}$ عند 0

7- أحسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ عند $\frac{\pi}{2}$

2) $f(x)=\frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ عند 0

3) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)$ عند 0

4) $f(x)=\frac{1}{\cos 2x}-\tan 2x$ عند $\frac{\pi}{4}$

8- بين أن $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند 0

9- أوجد نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد عددا حقيقيا α بحيث إذا كان $x\in]1-\alpha, 1+\alpha[$ فإن $f(x)>10^3$

10- عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{6x-1}{4x-1}$ عند $+\infty$
ثم أوجد عددا حقيقيا A بحيث إذا كان $x\rangle A$ فإن $f(x)\in]1,4\ ,\ 1,6[$

11- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\cos^2 x-x+1$
1) لماذا لا يمكن تطبيق القواعد العملية في حساب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$ ؟
2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $-x+1\le f(x)\le -x+2$
ثم استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

12- بين أنه من أجل كل $x\rangle -1$ لدينا $\frac{-1}{x+1}\langle\frac{\cos x}{x+1}\langle\frac{1}{x+1}$
ثم استنتج نهاية الدالة $x\to\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

13- f دالة معرفة على $]2,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{3x+\cos x}{x-2}$ بين أنه من أجل كل $x\rangle 2$ لدينا $\frac{3x+1}{x-2}\ge f(x)\ge\frac{3x-1}{x-2}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

14- f دالة بحيث من أجل كل $x\rangle 0$ ، $f(x)\ge\frac{1}{3}x^2+1$ ما هي نهاية f عند $(+\infty)$ ؟

15- عين نهاية الدوال f , g , h عند $-\infty$ و $+\infty$ باستعمال نظرية الحصر
$f(x)=\frac{\cos x}{x^2+1}$ ، $g(x)=x^2+3+\cos x$ ، $h(x)=-x+1+\sin x$

16- f دالة بحيث من أجل كل $x\ge 0$: $|f(x)-4|\le\frac{2}{x+1}$ ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟

17- أدرس النهايات عند $-\infty,+\infty,-\frac{1}{2}$ للدالة f المعرفة $f(x)=\frac{-3x}{2x+1}$
ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة و كذا الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

18- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و (C_f) منحناها البياني في معلم معطى و (d) مستقيم معادلته $y=x-3$ عين الجمل الصحيحة من بين الجمل الآتية :

أ) إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-3$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$
ب) إذا كان $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$
ج) إذا كان $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=+\infty$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$
د) إذا كان $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=0$ فإنه (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$
هـ) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) فإن $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل التالي :
$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^2+1}$$

19- f دالة معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x}}$ و منحناها البياني (C_f).
أوجد منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f).

20- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$
1) احسب نهاية f عند $-\infty,+\infty$
2- أ) اكتب $4x^2-4x+3$ على الشكل النموذجي
ب) أدرس النهاية عند $-\infty$ و $+\infty$ للدالة g المعرفة بـ $g(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$
ج) استنتج أن المنحنى الممثل للدالة f له مستقيمان مقاربان مائلان يطلب تعيينهما ثم بين أن (C_f) يقع فوق كل منهما.

21- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x)=-x^3+3x+1$
1) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها
2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في كل مجال من المجالات التالية :
$[1,2]$, $[-1,1]$, $[-2,-1]$

22- إليك جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+3x^2-2$
لماذا للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة حلول مختلفة على $\mathbb{R}$ ؟

23- 1) بين أن المعادلة $-x^3-x+4=0$ تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$
اعط حصرا لهذا الحل بتقريب 0.001
2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a المعادلة $-x^3-x+4=a$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$